# Erinnerung:

**Definition:** Der $K$-Vektorraum

$$\boxed{V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)}$$

heisst der *Dualraum von $V$*, und seine Elemente heissen *Linearformen auf $V$*.

**Proposition-Definition:** Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis eines $K$-Vektorraums $V$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ sei $\ell_i \in V^\vee$ die lineare Abbildung

$$\ell_i \colon V \longrightarrow K, \quad \textstyle\sum_{j=1}^n x_j v_j \mapsto x_i.$$

Dann ist $B^\vee := (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ eine geordnete Basis von $V^\vee$, genannt die *duale Basis zu $B$*.

**Proposition:** Seien $B$ eine geordnete Basis von $V$ und $B'$ eine geordnete Basis von $W$, und sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\boxed{{}_{B^\vee}[f^\vee]_{B'^\vee} = {}_{B'}[f]_B^T.}$$

$f^\vee : W^\vee \longrightarrow V^\vee$

Bew.: $B = (v_1, .., v_n)$ Basis von $V$ $\rightsquigarrow$ $B^\vee = (\ell_1, .., \ell_n)$ Basis von $V^\vee$

$B' = (w_1, .., w_m)$ Basis von $W$ $\rightsquigarrow$ $B'^\vee = (k_1, .., k_m)$ " " $W^\vee$

$\boxed{\ell_i\left(\sum_j x_j v_j\right) = x_i}$

$\boxed{k_j\left(\sum_i y_i w_i\right) = y_j}$

${}_{B'}[f]_B =: A = (a_{ij})_{i,j}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i}$

$\Rightarrow$ $A^T = (a_{ij})_{j,i}$

te zeigen: $\forall i\ ;\ f^\vee(k_i) = \sum_j a_{ij} \ell_j$.

Äquivalent: $\forall i\ \forall j'\ :\ f^\vee(k_i)(v_{j'}) \stackrel{?}{\doteq} \left(\sum_j a_{ij} \ell_j\right)(v_{j'})$

$$f^\vee(k_i)(v_{j'}) = k_i\Big(\sum_{i'} a_{i'j'} w_{i'}\Big) = k_i(\underbrace{f(v_{j'})}) = (k_i \circ f)(v_{j'})$$

$$k_i\Big(\sum_{i'} a_{i'j'} w_{i'}\Big) = a_{ij'}$$

$$\Big(\sum_j a_{ij} \ell_j\Big)(v_{j'}) = \sum_j a_{ij} \underbrace{\ell_j(v_{j'})}_{= \delta_{jj'}} = a_{ij'}$$

qed.

---

$f : V \to W$ linear.

$k \in W^\vee$ d.h. $k : W \to K$ linear

$\Rightarrow f^\vee(k) := k \circ f : V \to K$ linear, $f^\vee(k) \in V^\vee$

$f^\vee : W^\vee \longrightarrow V^\vee,\ k \mapsto f^\vee(k)$ linear.

$$k \in W^\vee \longmapsto f^\vee(k) \in V^\vee$$

**Proposition:** Für jeden $K$-Vektorraum $V$ und jedes Element $v \in V$ ist die Auswertungs-Abbildung (evaluation)

$$\mathrm{ev}_v \colon V^\vee \longrightarrow K,\ \ell \mapsto \ell(v)$$

linear, also ein Element des *Bidualraums* $(V^\vee)^\vee$. Die induzierte Abbildung

$$(*) \qquad V \longrightarrow (V^\vee)^\vee,\ v \mapsto \mathrm{ev}_v$$

$$v \longmapsto \mathrm{ev}_v$$

ist linear und injektiv. Sie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $V$ endlich-dimensional ist.

Bew.: $\forall \ell, \ell' \in V^\vee$: $\mathrm{ev}_v(\ell+\ell') = (\ell+\ell')(v) = \ell(v) + \ell'(v) = \mathrm{ev}_v(\ell) + \mathrm{ev}_v(\ell')$

$\forall \lambda \in K$: $\mathrm{ev}_v(\lambda\ell) = (\lambda\ell)(v) = \lambda \cdot \ell(v) = \lambda \cdot \mathrm{ev}_v(\ell)$ $\Big\} \Rightarrow \mathrm{ev}_v$ linear

$\forall v, v' \in V$: $\forall \ell \in V^\vee$: $\mathrm{ev}_{v+v'}(\ell) = \ell(v+v') = \ell(v) + \ell(v') = \mathrm{ev}_v(\ell) + \mathrm{ev}_{v'}(\ell) = (\mathrm{ev}_v + \mathrm{ev}_{v'})(\ell)$.

$\forall \lambda \in K$: $\mathrm{ev}_{\lambda v}(\ell) = \ldots = (\lambda \cdot \mathrm{ev}_v)(\ell)$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{ev}_{v+v'} = \mathrm{ev}_v + \mathrm{ev}_{v'}$, $\mathrm{ev}_{\lambda v} = \lambda \cdot \mathrm{ev}_v$ $\Big\} \Rightarrow v \mapsto \mathrm{ev}_v$ linear.

Sei $v$ im Kern der Abb $(*)$. Also $\mathrm{ev}_v = 0$. Also $\forall \ell \in V^\vee$: $\mathrm{ev}_v(\ell) = 0$ also $\ell(v) = 0$.

Annahme: $v \neq 0$. Wähle ein Komplement $V''$ zu $V' := \langle v \rangle$, d.h. $V = V' \oplus V''$.

Definiere $\ell \colon V \to K$ durch $\ell(\lambda \cdot v + v'') := \lambda$ für jedes $\lambda \in K$ und $v'' \in V''$.

Dies ist linear mit $\ell(v) = 1$. Also ist $v$ nicht im Kern.

$n := \dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(V^\vee) = n \Rightarrow \dim((V^\vee)^\vee) = n$

injektiv $\Rightarrow$ Isomorphismus.

Ist $\dim(V) = \infty$, sei $B$ eine Basis.

Sei $\ell : V \to K$, $\sum_{b\in B}' x_b b \mapsto \sum' x_b$, d.h. $\ell(b) = 1$ für jedes $b \in B$.

Für jedes $b \in B$ setze $\ell_b : V \to K$ linear mit $\ell_b(b') = \delta_{bb'}$.

Dann ist $\{\ell_b \mid b \in B\} \cup \{\ell\}$ lin. unabh.

Setze fort zu einer Basis $B'$ von $V^\vee$.

Betrachte die lin. Abb. $k : V^\vee \to K$ mit $k(\ell_b) = 0$ für alle $b \in B$
$k(\ell) = 1$
und irgendwie auf den Rest.

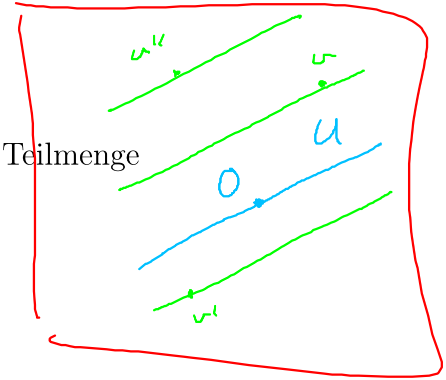
Beh.: $\nexists v \in V : ev_v = k$.

denn: dann wäre $v = \sum_{b\in B}' x_b b$. und $\ell_b(v) = x_b = 0$ für alle $b \in B$

also wäre $v = 0$, aber $k(\ell) = 1$.

(qed)

## 5.11 Quotientenvektorräume




Sei $U$ ein Unterraum eines $K$-Vektorraums $V$. Für jedes $v \in V$ betrachte die Teilmenge

Nebenklassen von $U$

$$v + U \ := \ \{v + u \mid u \in U\} \ \subset \ V.$$

Geometrisch ist dies ein *zu $U$ paralleler* affin-linearer Teilraum von $V$.

**Proposition:** Je zwei Teilmengen der Form $v+U$ sind entweder gleich oder disjunkt, und die Vereinigung aller ist $V$. Genauer gilt

$$v + U = v' + U \iff v - v' \in U \iff v' \in v + U \iff v \in v' + U.$$

Definiere $v \sim v' :\iff v - v' \in U$.

Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Mengen $v+U$ für alle $v \in V$ sind die Äquivalenzklassen.

Vergleiche Konstruktion von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**Proposition:** Die Menge der Teilmengen

$$V/U \ := \ \{v + U \mid v \in V\}$$

besitzt eine eindeutige Struktur eines $K$-Vektorraums, so dass gilt:

zu zeigen: wohldefiniert!

(a) $\forall v, v' \in V : (v + U) + (v' + U) = (v + v') + U$.

(b) $\forall v \in V \ \forall \lambda \in K : \lambda \cdot (v + U) = (\lambda v) + U$.

Rest automatisch.

Für diese gilt weiter:

(c) Das Nullelement von $V/U$ ist $0_{V/U} = 0_V + U = U$.

(d) Das additive Inverse jedes Elements $v + U$ ist $-(v + U) = (-v) + U$.

**Definition:** $V/U$ heisst der *Quotientenvektorraum* oder *Faktorraum von $V$ nach $U$*.

**Proposition:** Die Abbildung $\pi \colon V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ist linear und surjektiv und hat Kern $U$.

$v \in \mathrm{Kern}(\pi) \iff v + U = U \iff v \in U$.

**Beispiel:** (a) Es ist $U = V$ genau dann, wenn $V/U = \{0\}$ ist.

(b) Es ist $U = \{0\}$ genau dann, wenn $\pi$ ein Isomorphismus ist.

**Proposition:** *(Universelle Eigenschaft)* Für jeden $K$-Vektorraum $W$ und jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $U \subset \mathrm{Kern}(f)$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon V/U \to W$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\ & V/U \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$v \in V$, $v+U \in V/U$, $f(v)$

Bew.: Notwendig: $\forall v \in V\colon \overline{f}(v+U) = f(v)$.

Aber $\forall v' \in V\colon\ v'+U = v+U \Rightarrow v'-v \in U \Rightarrow f(v') = f(v+(v'-v)) = f(v) + \underbrace{f(v'-v)}_{=0} = f(v)$

Deshalb ist $\overline{f}\colon V/U \to W,\ v+U \mapsto f(v)$ wohldefiniert.

Dann $\overline{f}$ ist linear. qed.

---

**Proposition:** Ein Unterraum $U' \subset V$ ist ein Komplement von $U$ genau dann, wenn die Abbildung $\pi|_{U'}\colon U' \to V/U$ ein Isomorphismus ist.

Bew.: $U'$ Komplement zu $U$ $\Rightarrow$ $U \times U' \xrightarrow{\sim} V$, $(u,u') \mapsto u+u'$

$U' \ni u' \mapsto u'+U$ $\quad V/U \quad$ $u+u'+U = u'+U$.

surjektiv, Kern $= U' \cap U = \{0\}$. $\Rightarrow$ $\pi|_{U'}$ Isom.

---

Umgekehrt: Ist $\pi|_{U'}$ Isom, dann ist $0 = \mathrm{Kern}(\pi|_{U'}) = U' \cap \mathrm{Kern}(\pi) = U' \cap U$.

und $\forall v \in V\colon \exists u' \in U'\colon \pi(u') = v+U$, d.h. $u'+U = v+U \Rightarrow v-u' \in U \Rightarrow v = u' + (v-u') \in U'+U$.

Also ist $U' + U = V$, Also ist $U' \oplus U = V$. qed.

**Beispiel:** Für $m \leqslant n$ betrachte die Injektion $i\colon K^m \hookrightarrow K^n$, $x \mapsto \binom{x}{0}$ sowie die dazu komplementäre Injektion $j\colon K^{n-m} \hookrightarrow K^n$, $y \mapsto \binom{0}{y}$. Dann induziert $j$ einen Isomorphismus $K^{n-m} \xrightarrow{\sim} K^n/i(K^m)$.

**Proposition:** Sei $B$ eine Basis von $V$, so dass $B \cap U$ eine Basis von $U$ ist. Dann ist $\{v + U \mid v \in B \smallsetminus U\}$ eine Basis von $V/U$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V) \;=\; \dim_K(U) + \dim_K(V/U).$$

**Variante:** Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von $V$, deren Anfangssegment $B' := (b_1, \ldots, b_m)$ eine geordnete Basis von $U$ ist. Dann ist $B'' := (b_{m+1} + U, \ldots, b_n + U)$ eine geordnete Basis von $V/U$.